Малая теорема Ферма.

По определению, a сравнимо с b по модулю n, если a - b=kn, где k целое число. Обозначается это так $a \equiv b \pmod n$.

1. Докажите, что если $a \equiv b \pmod n$ и $c \equiv d \pmod n$, то:
    a. $a + c \equiv b + d \pmod n$;
    b. $a - c \equiv b - d \pmod n$;
    c. $ac \equiv bd \pmod n$;
    d. для любого натурального m верно $a^m \equiv b^m \pmod n$.
2. Докажите, что:
    a. Если k не равно нулю и $ka \equiv kb \pmod{kn}$, то $a \equiv b \pmod n$;
    b. Если $ka \equiv kb \pmod n$ и числа k, n взаимно просты, то $a \equiv b \pmod n$.
3. Найдите остаток от деления
    a. Числа 21000 на 7;
    b. Числа 2012005 на 17.
4. Докажите, что для любого целого a:
    a. $a^2 - a$ делится на 2;
    b. $a^3 - a$ делится на 3;
    c. $a^5 - a$ делится на 5.
5. Пусть p – простое число, а k – целое число, не делящееся на p. Рассмотрим остатки от деления на p чисел k, 2k, 3k …, (p – 1)k. Докажите, что:
    a. Среди этих остатков нет нулевого;
    b. Все эти остатки разные;
    c. Это все ненулевые остатки от деления на p.
6. Используя задачу 5, докажите, что если целое число k не кратно простому числу p, то k^{p-1} дает остаток 1 при делении на p.
7. Докажите, что для составного числа 561 справедлив аналог малой теоремы Ферма: если (a, 561) = 1 (то есть НОД этих чисел равен 1), то $a^{560} \equiv 1 \pmod{561}$.
   Такие числа, как число 561, называются числами Кармайкла.
8. Докажите, что предпоследняя цифра десятичной записи степени тройки всегда четная.
9. (*)Пусть p – простое число. Докажите, что при некотором простом q все числа вида $n^p - p$ не делятся на q.